möglichen Weltmodellen eine bestimmte Auswahl zu treffen: *das Machsche Prinzip ist ein Auswahlprinzip.* Diese Auswahl ist freilich keine willkürliche, sondern sie setzt ein bestimmtes, nicht weiter reduzierbares Verhältnis der Grundbegriffe Raum, Zeit und Materie schon voraus. Vielleicht ist es nicht abwegig, an die Unterscheidung Kants zwischen „konstitutiven" und *bloß* „regulativen" Prinzipien der Erfahrung * zu erinnern; vielleicht ist gerade die Kantische Terminologie geeignet, das Verhältnis der Grundgleichungen der Physik zum Machschen Prinzip in ein klareres Licht zu setzen: Wir möchten von den Grundprinzipien, aus denen unter anderem die Feldgleichungen der Physik hervorgehen, sagen, daß sie für den Aufbau der Erfahrung, wie er in der Physik vollzogen wird, „konstitutiv" seien, während demgegenüber dem Machschen Prinzip nur der Charakter eines „regulativen Prinzips der Erfahrung" zukomme. Ein derart regulatives Prinzip muß vor allem dort zur Auswirkung gelangen, wo es sich — wie in der Kosmologie — um die Totalität von Erfahrungen handelt. Es wird von hieraus vielleicht verständlicher, daß das Machsche Prinzip, obwohl vom Standpunkt der fundamentalen physikalischen Prinzipien aus beurteilt nur akzidentiell, doch hinsichtlich der Auffassung des Kosmos als eines Ganzen — hinsichtlich der Frage nach Endlichkeit oder Unendlichkeit des Universums — von entscheidender Bedeutung sein kann.

* Kritik d. reinen Vernunft, siehe vor allem den Anhang zur transzendentalen Dialektik.

Statistische Untersuchung des Grundprozesses der Quantentheorie der Elementarteilchen

Von Fritz Bopp

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. **8a**, 6—13 [1953]; eingegangen am 30. September 1952)

Erwin Fues zum 60. Geburtstag

Der Grundprozeß der Quantentheorie der Teilchen, die Erzeugung oder Vernichtung eines Teilchens in einem Punkt, wird elementarstatistisch und quantenstatistisch analysiert. Es wird gezeigt, daß man jede Gesamtheit von Grundprozessen elementarstatistisch behandeln kann, wenn man gewisse Bedingungen einhält, die davon herrühren, daß die elementare Statistik nichtumkehrbaren Prozessen angepaßt ist, während die quantenstatistischen Prozesse umkehrbar sind.

To be or not to be
that is the question

1. Der Grundprozeß der Quantentheorie

Die Quantentheorie der Elementarteilchen steht im logischen Aufbau über der Quantenmechanik. Denn diese folgt aus jener deduktiv, jene aus dieser induktiv. Hieraus ergibt sich, daß die Analyse der Grundlagen von der Quantentheorie der Teilchen ausgehen muß, sobald die Induktion genügend weit fortgeschritten ist.

Diese Feststellung wird dadurch unterstrichen, daß die Operatoren in der Quantentheorie der Teilchen eine einfache und einheitliche Bedeutung haben. Sie beschreiben (bei Verwendung von Lagekoordinaten) die Vernichtung oder die Erzeugung eines Teilchens *hier und jetzt.* Dies gilt sogar in nichtrelativistischer Näherung, obwohl in ihr Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren stets so verbunden sind, daß die Zahl der Teilchen konstant bleibt.

Alle Operatoren der Quantentheorie stimmen also in ihrer Funktion überein. Ihre Mannigfaltigkeit ergibt sich allein daraus, daß gleichartige Operatoren auf verschiedene Punkte in Raum und Zeit und auf verschiedenartige Teilchen bezogen sind. Um die Operatoren zu untersuchen, genügt es daher, einen einzigen zu analysieren. Er beschreibt den *Grundprozeß der Quantentheorie*: Erzeugung und Vernichtung eines Teilchens in einem Punkt.

Nur diesen Prozeß wollen wir hier behandeln. Es ist der einfachste Quantenprozeß, weil nur dichotomische Variable und reelle Transformationen vorkommen. Wir stellen die Untersuchung der Voraussetzungen zurück, welche die gesamte Quantentheorie der Teilchen aus dem Grundprozeß aufzubauen erlauben. Eine solche Abtrennung ist möglich und zweckmäßig, weil mindestens nach den vorliegenden Ansätzen der Theorie der raum-zeitliche Zusammenhang der Operatoren deren Charakter nicht beeinflußt.

2. Voraussetzungen der Beobachtung

Im Sinne obiger Abgrenzung unserer Aufgabe fassen wir einen festen Raumpunkt P ins Auge und beobachten, was in ihm vorgeht. Für unsere Untersuchung müssen wir wissen, was beobachtbar ist. Wir nehmen an, daß wir zu jeder Zeit feststellen können, ob der Punkt P besetzt oder unbesetzt ist, und daß wir davon unabhängig für jedes Zeitintervall die Frage beantworten können, ob sich der Besetzungszustand geändert hat oder nicht. Es sei aber nicht vorausgesetzt, daß das Geschehen in P nach einer Beobachtung ungestört weiterlaufe. Das bedeutet, daß wir jeden Punkt in ungestörter Situation nur einmal ins Auge fassen können. Wir werden also im Einzelfall entweder den Besetzungszustand in einem einzigen Zeitpunkt t oder die Wandlung in einer einzigen Zeitspanne (t_0, t) bestimmen.

Individuelle Gesetze wären hiernach nur erreichbar, wenn wir Einzelmessungen an Punkten in gleichen Situationen zusammentragen könnten. Dies würde voraussetzen, daß es Experimente gäbe, Situationen herzustellen, in denen Existenzbeobachtungen in allen vergleichbaren Zeitpunkten oder Wandlungsbeobachtungen in allen vergleichbaren Zeitspannen *stets* zu demselben Ergebnis führen. Solche Experimente sind nicht bekannt.

Es ist nur möglich, statistische Gesetze zu formulieren. Eine statistische Beobachtung liegt vor, wenn wir für eine Gesamtheit von Vorgängen zur Zeit t eine Existenzbeobachtung oder im Zeitintervall (t_0, t) eine Wandlungsbeobachtung gemacht haben und die relativen Häufigkeiten angeben, mit denen die verschiedenen Fälle realisiert sind.

Auch bei statistischer Beobachtung einer einzigen Gesamtheit kann man nur *ein* Datum bestimmen, nämlich eine Wahrscheinlichkeit. Durch die Beobachtung hört die Gesamtheit auf, definiert zu sein. Die statistische Beobachtung ist jedoch dadurch der individuellen überlegen, daß Gesamtheiten im Gegensatz zu individuellen Situationen *reproduzierbar* sind. Reproduzierbar heiße eine Gesamtheit, wenn es wohldefinierte experimentelle Verfahren gibt, Gesamtheiten herzustellen, in welchen analoge Beobachtungsakte stets gleiche Ergebnisse liefern. Ist auf diese Weise mit der Gewißheit, die Induktion zu geben vermag, sichergestellt, daß wir *äquivalente Gesamtheiten* haben und wie wir sie herstellen können, so können wir den ganzen Vorgang statistisch beschreiben, indem wir Einzelaussagen über viele äquivalente Gesamtheiten, wie von derselben Gesamtheit herrührend, behandeln.

Wenn wir, unserm Programm folgend, Punkt P beobachten, so sind die Vorgänge in ihm meistens durch seine Umgebung bestimmt. Man könnte deshalb daran zweifeln, ob unter diesen Umständen seine Isolation erlaubt ist. Doch ist es fürs erste unerheblich, wie die Änderung zustande kommt. Die Situation ist in gewisser Hinsicht ähnlich wie in der klassischen Mechanik. Dort betrachten wir zwar statt des Raumpunktes einen Massenpunkt im Laufe seiner Bewegung. Aber wir beschreiben diese zunächst rein kinematisch, also ebenfalls ohne Rücksicht auf ihre Ursachen, auf die wir aus den Gesetzen der Bewegung schließen. Auch die Mechanik der Kontinua können wir zum Vergleich heranziehen, in der wir Volumenelemente trotz starker Wechselwirkung mit der Umgebung isolieren und den Einfluß der Umgebung durch den lokalen Spannungstensor beschreiben.

3. Statistische Beschreibung des Grundprozesses

Nach der vorstehenden Analyse können wir die Wahrscheinlichkeiten für die Existenz eines Teilchens in P und für seine Wandlung in jeder definierten Gesamtheit als experimentell gegeben betrachten. Wir untersuchen speziell die Wahrscheinlichkeiten zu den Zeiten t_0 und t und für die durch sie definierte Zeitspanne (t_0, t), die finit oder infinitesimal angenommen werden kann.

$$\mathring{w}_1 = \frac{1 + \mathring{w}}{2}, \quad \mathring{w}_2 = \frac{1 - \mathring{w}}{2} \tag{1}$$

seien die Wahrscheinlichkeiten, daß sich zur Zeit t_0 in P bzw. *kein* Teilchen oder *ein* Teilchen aufhält. Da beim Grundprozeß zwei oder mehr Teilchen in einem Punkte nicht angenommen werden, sind die Wahrscheinlichkeiten alternativ. Ihre Summe muß 1 sein. Die entsprechenden Gleichungen zur Zeit t lauten:

$$w_1 = \frac{1 + w}{2}, \quad w_2 = \frac{1 - w}{2}. \tag{2}$$

Die ebenfalls alternativen Wahrscheinlichkeiten, daß der Besetzungszustand in der Zeitspanne (t_0, t) erhalten bleibt oder sich ändert, nennen wir bzw.

$$v_1 = \frac{1+v}{2}, \quad v_2 = \frac{1-v}{2}. \tag{3}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten bezeichnen den Gesamteffekt in der Zeitspanne; v liefert keine Aussage darüber, ob mehrfache Wandlungen vorkommen.

Korrelationsstatistisch betrachtet, liegt eine *Doppelalternative* vor, die man durch eine Wahrscheinlichkeitstafel der Form

$$(W_{ik}) = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

zu beschreiben pflegt. Darin möge W_{ik} die Wahrscheinlichkeit bedeuten, den Punkt P zur Zeit t_0 im Zustand k und zur Zeit t im Zustand i anzutreffen. Man beachte hier die Definition der Indexreihenfolge, die in dieser Form für Ziff. 4 bequem ist.

Die einzelnen Elemente der Korrelationstafel sind nach dem, was in Ziff. 2 als beobachtbar angenommen ist, experimentell nicht unmittelbar gegeben. Die Bestimmung von W_{12} würde z. B. voraussetzen, daß wir an demselben individuellen Fall feststellen könnten: Punkt P ist zur Zeit t_0 besetzt, zur Zeit t unbesetzt. Das, was wir beobachten können, reicht aber aus, um die Korrelationstafel zu berechnen.

Nach der Bedeutung der W_{ik} einerseits und der $\mathring{w}_i$, w_i und v_i andrerseits, gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathring{w}_1 &= W_{11} + W_{21}, & \mathring{w}_2 &= W_{12} + W_{22}; \\ w_1 &= W_{11} + W_{12}, & w_2 &= W_{21} + W_{22}; \\ v_1 &= W_{11} + W_{22}, & v_2 &= W_{12} + W_{21}. \end{aligned} \tag{5}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathring{w} &= \mathring{w}_1 - \mathring{w}_2 = W_{11} - W_{12} + W_{21} - W_{22}, \\ w &= w_1 - w_2 = W_{11} + W_{12} - W_{21} - W_{22}, \\ v &= v_1 - v_2 = W_{11} - W_{12} - W_{21} + W_{22}. \end{aligned} \tag{5a}$$

Nehmen wir noch

$$W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22} = 1 \tag{5b}$$

hinzu, so haben wir vier Bestimmungsgleichungen für W_{ik} mit folgender Auflösung:

$$\begin{aligned} W_{11} &= \frac{1}{4}(1 + \mathring{w} + w + v), \\ W_{12} &= \frac{1}{4}(1 - \mathring{w} + w - v), \\ W_{21} &= \frac{1}{4}(1 + \mathring{w} - w - v), \\ W_{22} &= \frac{1}{4}(1 - \mathring{w} - w + v). \end{aligned} \tag{6}$$

Es ist von Interesse, die Variationsbereiche dieser Größen zu betrachten. Nach ihrer Definition sind die Größen $\mathring{w}$, w, v auf das Intervall $(-1, +1)$ beschränkt. Die W_{ik} können nur im Intervall $(0, +1)$ variieren, wenn sie echte Wahrscheinlichkeiten einer Doppelalternative sind. Wenn die W_{ik} unter Einhaltung der Bedingung (5b) in ihrem Intervall beliebig variieren, halten sich $\mathring{w}$, w, v nach den Gln. (5a) in ihren Grenzen.

Die Umkehrung gilt nicht. Wenn $\mathring{w}$, w und v in ihren Grenzen beliebig variieren, überschreiten die W_{ik} nach Gl. (6) niemals die obere Grenze; aber sie können kleiner als Null werden. Wenn z. B.

$$\mathring{w} = -1, \quad w = +1, \quad v = +1$$

ist, so folgt aus (5):

$$W_{11} = +\frac{1}{2}, \quad W_{12} = +\frac{1}{2}, \quad W_{21} = -\frac{1}{2}, \quad W_{22} = +\frac{1}{2}.$$

Der Grund für dieses überraschende Resultat ist leicht zu erkennen. Es bedeuten:

$\mathring{w} = -1$: in P zur Zeit t_0 *ein* Teilchen vorhanden,
$\mathring{w} = +1$: in P zur Zeit t *kein* Teilchen vorhanden,
$v = +1$: in P und der Zeitspanne (t_0, t) *kein Übergang*. (6a)

Das ist ein Widerspruch. Ähnliche Widersprüche ergeben sich stets, wenn negative W_{ik} vorkommen.

Man sollte darum meinen, daß die experimentell bestimmbaren Wahrscheinlichkeiten $\mathring{w}_i$, w_i, v_i nicht beliebig variieren können. Abb. 1 a—c geben für verschiedene Werte von v den Variationsbereich von $\mathring{w}$ und w, in dem $W_{ik} \geq 0$ ist.

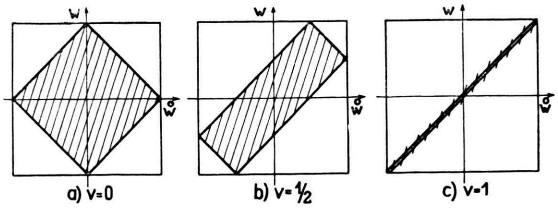

Abb. 1a—c. Bereiche von $\mathring{w}$, w für drei Werte von v (schraffiert gezeichnet), für die $W_{ik} \geqq 0$.

In den Figuren sind nur positive Werte von v berücksichtigt. Die Bereiche, die zu negativen v gehören, erhält man durch Spiegelung an den Achsen. Die Eckpunkte des Quadrates können nur im Falle der Determiniertheit erreicht werden.

Die W_{ik} dienen zur Berechnung von Mittelwerten der Funktionen f_{ik}, die von zwei Parametern ab-hängen, dem Zustand k zur Zeit t_0 und dem Zustand i zur Zeit t, welche nur die beiden Werte 1 (unbesetzt) und 2 (besetzt) haben. Es ist

$$\bar{f} = \sum_{i,k} W_{ik} f_{ik} . \tag{7}$$

Sämtliche Mittelwerte lassen sich durch Linearkombination aus den Mittelwerten folgender vier charakteristischer Funktionen berechnen:

$$(f^0_{ik}) = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 1 \end{pmatrix}, \quad (f'_{ik}) = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix},$$

$$(f''_{ik}) = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & -1 \end{pmatrix}, \quad (f'''_{ik}) = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}. \tag{7a}$$

Nach den Gln. (5a) und (5b) lauten sie:

$$\overline{f^0} = 1, \ \overline{f'} = \mathring{w}, \ \overline{f''} = w, \ \overline{f'''} = v . \tag{7b}$$

4. Vergleichung mit der Quantenstatistik.

Da wir die W_{ik} nicht unmittelbar experimentell bestimmen können, müssen wir uns fragen, ob wir überhaupt noch an den einschränkenden Ungleichungen $W_{ik} \geq 0$ festhalten können. Wenn sie bestehen würden, wäre das daran erkennbar, daß die Werte $\mathring{w}$ und w bei gegebenem v nur in den Bereichen liegen, die durch unsere Figuren gekennzeichnet sind.

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die Ungleichungen durch die Quantentheorie in Frage gestellt werden. Der Beweis ergibt sich aus dem Zerlegungssatz[1] der Korrelationsrechnung. Er ist der Form nach bereits in der unten zitierten Arbeit enthalten. Wir wiederholen und ergänzen hier die früheren Ergebnisse.

So geringfügig die Änderungen durch den Fortfall der Ungleichungen mathematisch formal erscheinen, so schwerwiegend sind sie physikalisch. Ein Blick auf (6a) zeigt, daß ohne Ungleichungen die ganze Problematik der Quantentheorie auftaucht, denn die drei Thesen unter (6a) sind anschaulich nicht zu vereinen. Doch können wir dieses Problem hier noch nicht abschließend behandeln. Wir kommen in Ziff. 5 und 6 darauf zurück.

Zunächst geben wir den Beweis für unsere Behauptung. Dabei ist zu beachten, daß die Korrelationstafel (6) und Gl. (7) auch ohne Ungleichungen gelten, weil sie zu den richtigen Mittelwerten (7b) führen und durch diese eindeutig bestimmt sind. Sie verlieren jedoch ihre anschauliche Bedeutung.

[1] F. Bopp, Z. Naturforschg. **7a**, 82 [1952].

Der Zerlegungssatz besagt, daß wir jedes Element der Korrelationstafel bis auf Vorzeichen eindeutig in zwei Faktoren zerlegen können:

$$W_{ik} = V_{ik} S_{ik} , \tag{8}$$

wenn wir fordern, daß die S_{ik} eine *orthogonale* Matrix bilden:

$$S = (S_{ik}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{9}$$

und daß folgende Produkte der zu S transponierten Matrix S^T mit $V = (V_{ik})$ symmetrisch sind:

$$\mathring{P} = S^T V = \mathring{P}^T, \ P = V S^T = P^T. \tag{10}$$

Die Matrizen $\mathring{P}$ und P lauten, wenn wir Gl. (9) benutzen und die Quotientenmatrix V, definiert durch Gl. (8), nämlich

$$V = \begin{pmatrix} W_{11}/\cos\alpha, & W_{12}/\sin\alpha \\ -W_{21}/\sin\alpha, & W_{22}/\cos\alpha \end{pmatrix},$$

in Gl. (10) einsetzen:

$$\mathring{P} = \begin{pmatrix} W_{11} + W_{21}, & W_{12}\,\mathrm{ctg}\,\alpha - W_{22}\,\mathrm{tg}\,\alpha \\ W_{11}\,\mathrm{tg}\,\alpha - W_{21}\,\mathrm{ctg}\,\alpha, & W_{12} + W_{22} \end{pmatrix} \tag{11a}$$

und

$$P = \begin{pmatrix} W_{11} + W_{12}, & -W_{11}\,\mathrm{tg}\,\alpha + W_{12}\,\mathrm{ctg}\,\alpha \\ -W_{21}\,\mathrm{ctg}\,\alpha + W_{22}\,\mathrm{tg}\,\alpha, & W_{21} + W_{22} \end{pmatrix}. \tag{11b}$$

Nach der Definition von W_{ik} lauten die Diagonalelemente dieser Matrizen:

$$\mathring{P}_{ii} = \mathring{w}_i, \ P_{ii} = w_i . \tag{12}$$

Der Winkel α in der Orthogonalmatrix (9) ergibt sich aus der Forderung, daß $\mathring{P}$ und P symmetrisch sein sollen. Wie schon früher gezeigt, ist

$$tg^2\alpha = (W_{12} + W_{21})/(W_{11} + W_{22}).$$

Hieraus folgt, da sich Zähler und Nenner zu 1 ergänzen:

$$\sin^2\alpha = W_{12} + W_{21}, \ \cos^2\alpha = W_{11} + W_{22}, \tag{13}$$

d. i. mit Rücksicht auf die Gl. (5a)

$$\cos 2\alpha = v. \tag{14}$$

Dieses Ergebnis ist befriedigend, weil hiernach die Orthogonalmatrix

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+v}, & \sqrt{1-v} \\ -\sqrt{1-v}, & \sqrt{1+v} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

die sich mit einer quantenstatistischen Transformationsmatrix als äquivalent erweisen wird, allein durch die Umwandlungswahrscheinlichkeiten bestimmt ist[2].

Von dem Zerlegungssatz her gelangen wir unmittelbar zur quantenstatistischen Beschreibung der Vorgänge. Durch die symmetrischen Matrizen $\mathring{P}$ und P sind zwei Säkularprobleme definiert. Da nach Gl. (10)

$$P = S\mathring{P}S^T \tag{16}$$

ist, haben sie dieselben Eigenwerte. Wenn wir diese gemeinsamen Eigenwerte mit p_ϱ bezeichnen, lauten die Säkulargleichungen:

$$\mathring{P}\,\mathring{\psi}^{(\varrho)} = p_\varrho \mathring{\psi}^{(\varrho)}, \quad P\psi^{(\varrho)} = p_\varrho \psi^{(\varrho)}. \tag{17}$$

Es gibt zwei Eigenwerte ($\varrho = 1, 2$) und die zugehörigen Eigenvektoren $\mathring{\psi}^{(\varrho)}$ und $\psi^{(\varrho)}$ sind durch die orthogonale Transformation verbunden:

$$\psi^{(\varrho)} = S\,\mathring{\psi}^{(\varrho)}. \tag{18}$$

Wenn die Eigenwerte p_ϱ und die Eigenvektoren $\mathring{\psi}^{(\varrho)}$ und $\psi^{(\varrho)}$ bekannt sind, kann man daraus umgekehrt alle andern Größen ableiten. Nach bekannten Sätzen (und auch sofort verifizierbar) sind:

$$S_{ik} = \sum_\varrho \psi_i^{(\varrho)} \mathring{\psi}_k^{(\varrho)} \tag{19}$$

und

$$\mathring{P}_{ik} = \sum_\varrho p_\varrho \mathring{\psi}_i^{(\varrho)} \mathring{\psi}_k^{(\varrho)}, \quad P_{ik} = \sum_\varrho p_\varrho \psi_i^{(\varrho)} \psi_k^{(\varrho)}. \tag{20}$$

Nach Gl. (12) folgt daraus

$$\mathring{w}_i = \sum_\varrho p_\varrho (\mathring{\psi}_i^{(\varrho)})^2, \quad w_i = \sum_\varrho p_\varrho (\psi_i^{(\varrho)})^2. \tag{21}$$

Auch V_{ik} und W_{ik} können wir in ähnlicher Weise darstellen (l. c.).

Hierin begegnen uns fast alle Gleichungen, die uns aus der Quantenstatistik Gibbsscher Gesamtheiten[3] geläufig sind. $\mathring{P}$ und P sind die statistischen Matrizen, $\mathring{\psi}^{(\varrho)}$ und $\psi^{(\varrho)}$ die Zustandsvektoren, beide für die Zeiten t_0 und t_1, und p_ϱ sind die Zustandsgewichte. Es fehlt noch die Gleichung für die Mittelwerte.

Wir knüpfen an Gl. (7) an und setzen nach (8) und (10):

$$W_{ik} = (P_{i\underline{j}}\, S_{\underline{j}k})\, S_{ik}\,. \tag{22}$$

Über unterstrichene Indizes sei hier und im folgenden summiert. Die Substitution ergibt:

$$\bar{f} = P_{\underline{i}\underline{j}}\, S_{\underline{j}\underline{k}}\, S_{\underline{i}\underline{k}}\, f_{\underline{i}\underline{k}}\,,$$

d. h. der Mittelwert hat die Form:

$$\bar{f} = \mathrm{Spur}\,(PF) = P_{\underline{i}\underline{j}}\, F_{\underline{j}\underline{i}}\,. \tag{23}$$

Darin bedeutet F eine *symmetrische* Matrix, die der Funktion f_{ik} als Operator zugeordnet ist. Die Komponenten der Matrix lauten, wenn wir die beiden letzten Gleichungen identifizieren:

$$F_{ij} = \frac{1}{2} S_{i\underline{k}}\, S_{j\underline{k}}\, (f_{i\underline{k}} + f_{j\underline{k}})\,. \tag{23a}$$

Setzen wir in Gl. (23) die Transformation (16) ein, so folgt:

$$\bar{f} = \mathrm{Spur}\,(\mathring{P}\mathring{F}); \tag{24}$$

darin ist $\mathring{F}$ durch

$$\mathring{F} = S^T F S, \; F = S\mathring{F}S^T \tag{24a}$$

definiert. $\mathring{F}$ und F sind *verschiedene* Operatormatrizen, die *derselben* Funktion f_{ik} zugeordnet sind, sich aber auf die *verschiedenen* Zeitpunkte t_0 und t beziehen.

Die Operatormatrizen für die charakteristischen Funktionen aus Gl. (7a) lauten nach Gl. (23a) zur Zeit t:

$$F^0 = \begin{pmatrix}1,0\\0,1\end{pmatrix}, \; F' = \begin{pmatrix}\cos 2\alpha, & -\sin 2\alpha\\ -\sin 2\alpha, & \cos 2\alpha\end{pmatrix},$$

$$F'' = \begin{pmatrix}1,0\\0,1\end{pmatrix}, \; F''' = \begin{pmatrix}\cos 2\alpha, & 0\\ 0, & \cos 2\alpha\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Dafür können wir mit der Einheitsmatrix und den Pauli-Matrizen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix}1,0\\0,1\end{pmatrix}, \; \sigma_x = \begin{pmatrix}0,1\\1,0\end{pmatrix}, \; \sigma_y = \begin{pmatrix}0, & -i\\ i, & 0\end{pmatrix}, \; \sigma_z = \begin{pmatrix}1,0\\0,1\end{pmatrix} \tag{25a}$$

schreiben:

$$F^0 = \sigma_0, \; F' = \sigma_z \cos 2\alpha - \sigma_x \sin 2\alpha, \; F'' = \sigma_z\,,$$
$$F''' = \sigma_0 \cos 2\alpha\,. \tag{25b}$$

Es kommen also alle symmetrischen Matrizen vor.

Sämtliche Gleichungen in diesem Abschnitt folgen aus der (uneingeschränkten) Existenz der Korrelationstafel (6) und der Gl. (7) für die Mittelwerte. Man kann jedoch, ohne auf diese Gleichungen zurückzugreifen, die Größen der Quantenstatistik unmittelbar aus der Beobachtung bestimmen. Die Wahrscheinlichkeiten $\mathring{w}_i$ und w_i liefern nach Gl. (12) die Diagonalelemente von $\mathring{P}$ und P. Mit Rücksicht auf ihre Symmetrie lauten diese Matrizen also

[2] Hierdurch wird der Fall der Determiniertheit ausgeschlossen; denn der Hamilton-Operator lautet $\dot{S}S = \dot{v}/2\sqrt{1-v^2}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ und wird für $v = \pm 1$ unendlich.

[3] M. Delbrück u. G. Molière, S.-B. preuß. Akad. Wiss. physik. math. Kl. 1936, Nr. 1.

$$\mathring{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\mathring{w}, & \mathring{w}_0 \\ \mathring{w}_0, & 1-\mathring{w} \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+w, & w_0 \\ w_0, & 1-w \end{pmatrix}.$$

Darin sind die Werte von $\mathring{w}_0$ und w_0 noch unbestimmt. Da nach Gl. (16) die Eigenwerte beider Matrizen gleich sein müssen, sind $\mathring{w}_0$ und w_0 nicht unabhängig. Aus der Gleichheit ihrer Determinanten folgt vielmehr die Bedingung

$$\mathring{w}^2 + \mathring{w}_0^2 = w^2 + w_0^2.$$

Der verbleibende Parameter bestimmt die Transformationsmatrix, die die beiden statistischen Matrizen verbindet. Er hängt also unmittelbar mit den Wahrscheinlichkeiten v_i zusammen.

5. Folgerungen aus der speziellen Transformationstheorie

Man kann die statistischen Matrizen $\mathring{P}$ und P, die Operatormatrizen $\mathring{F}$ und F und schließlich die Transformationsmatrix so transformieren, daß die fundamentalen Gln. (16) und (24a) auch für die transformierten Größen gelten und daß sich die Mittelwerte nicht ändern. Da experimentell nur die Mittelwerte faßbar sind, bedeutet eine solche Transformation innerhalb der Quantentheorie eine gleichberechtigte Darstellung desselben physikalischen Systems.

Geht man von der transformierten Darstellung zur Korrelationstafel über, so wird diese nicht ungeändert bleiben, weil sie auf andere Wahrscheinlichkeiten bezogen ist. Es ist leicht zu erkennen, daß es Transformationen gibt, die aus beliebigen Wahrscheinlichkeitstafeln solche mit lauter positiven Werten machen.

Jede orthogonale (oder im gegebenen Fall auch unitäre) Matrix O liefert eine Transformation, welche die Form der Grundgleichung und die Größe der Mittelwerte invariant läßt. Sei X eine der Matrizen $\mathring{P}$, P, $\mathring{F}$, F oder S, so definieren wir die transformierten Größen $X' = \mathring{P}'$, P', $\mathring{F}'$, F' oder S' durch die Gleichung

$$X' = O^T X O\,. \tag{26}$$

Man verifiziert die Behauptung sofort durch Substitution der transformierten Größen in den Gleichungen (16), (24a) und (23).

Für uns sind speziell die Transformationen interessant, welche $\mathring{P}$ auf Diagonalform bringen. Da sich bei der Transformation (26) die Eigenwerte nicht ändern, lautet die Matrix nach der Transformation:

$$\mathring{P}'_{ik} = p_i\,\delta'_{ik}\,.$$

Diesen Ausdruck haben wir in Gl. (22) einzusetzen. Es ergibt sich

$$W'_{ik} = S'_{i\underline{r}}\,\mathring{P}'_{\underline{r}\underline{s}}\,S'_{\underline{j}\underline{s}}\,\dot{S}'_{\underline{j}k}\,S'_{ik} = S'_{i\underline{r}}\,\mathring{P}'_{\underline{r}k}\,S'_{ik}$$

oder

$$W'_{ik} = (S'_{ik})^2\,p_k\,. \tag{27}$$

In diesem Fall sind die W'_{ik} wesentlich positiv (oder O), d. h. die Wahrscheinlichkeiten haben eine anschauliche Bedeutung. Bei geeigneter Wahl der Darstellung treten die Schwierigkeiten, von denen wir in Ziff. 3 und 4 gesprochen haben, nicht auf.

Die besondere Bedeutung dieser Darstellung wird auch durch folgende Betrachtung deutlich. Durch W_{ik} sind, elementarstatistisch gesprochen, die Übergangswahrscheinlichkeiten u'_{ik} bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit u'_{ik}, ein Teilchen zur Zeit im Zustand k zu finden, wenn es zur Zeit t_0 in i gewesen ist, berechnet sich aus

$$u'_{ik} = \frac{W'_{ki}}{\mathring{w}'_i}\,. \tag{28}$$

Darin sind $\mathring{w}'_i$ die Anfangswahrscheinlichkeit im transformierten System. Aus Gl. (27) erhält man dafür auf Grund der Orthogonalitätsrelation

$$\mathring{w}'_i = p_i\,; \tag{29}$$

somit ist

$$u'_{ik} = (S'_{ik})^2\,. \tag{30}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gleich den Quadraten der entsprechenden Elemente der Transformationsmatrix.

Diese Gleichung ist wiederum geläufig. In reinen Fällen, wenn $(p_1, p_2) = (1, 0)$ oder $(0, 1)$ ist, ist der Anfangszustand ein Zustand der Gewißheit, wie er gewöhnlich bei der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten vorausgesetzt wird. Man denke etwa an die Diracsche Störungsrechnung und an andere Verfahren der Streurechnung. Gl. (30) ergibt sich *hier* zwangsläufig aus dem statistischen Modell, gilt aber in dieser einfachen Form nur, wenn man die spezielle Darstellung wählt, in der die statistische Matrix des Anfangszustandes diagonal ist. Wenn das nicht der Fall ist, sind die Übergangswahrscheinlichkeiten weniger einfach und u. U. negativ.

Freilich sind die Wahrscheinlichkeiten $\mathring{w}'_i$, w'_i und v'_i im allgemeinen nicht unmittelbar die beobachteten. In (29) haben wir bereits $\mathring{w}'_i$ angegeben. Für w'_i erhält man aus (27), (29) und (30) die sehr durchsichtige Gleichung

$$w'_i = \mathring{w}'_{\underline{k}}\,u'_{\underline{k}i} \tag{31}$$

und für v_i' ergibt sich mit Rücksicht auf $u_{12}' = u_{21}'$ (mit u bezeichnet) und $u_{11}' = u_{22}' = 1 - u$:

$$v_1' = 1 - u\,,\; v_2' = u\,. \tag{32}$$

Die Wahrscheinlichkeiten $\mathring{w}_i'$, w_i', v_i' sind Linearkombinationen von $\mathring{w}_i$, w_i und v_i und nicht diese selbst.

Wenn wir daran festhalten, daß nur die in Ziff. 2 genannten Größen beobachtbar sind, müssen wir die letzten Gleichungen auf den Fall einschränken, daß die Eigenvektoren im Ursprung (zur Zeit t_0) Zustände der Gewißheit beschreiben, daß also für $\varrho = 1$ und 2

$$\mathring{\psi}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\; \mathring{\psi}^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{33}$$

ist. In diesem Fall ist die Korrelationstafel, die wir formal aus der Quantenstatistik gewinnen, auch inhaltlich sinnvoll[4].

Dieses Ergebnis ist für das Experiment von Bedeutung. Wenn wir gemäß Ziff. 2 experimentell festgestellt haben, daß bei einer bestimmten Gesamtheit der Punkt P zur Zeit t_0 in allen Fällen besetzt oder in allen Fällen leer ist, so sind die Eigenvektoren durch Gl. (33) gegeben, und es liegt ein reiner Fall vor, wie Gl. (21) unmittelbar zeigt. Wir können also die Gln. (31) und (32) anwenden und erhalten:

$$w = w_1 - w_2 = (1 - 2u)\,\mathring{w} = \pm(1 - 2u), \tag{34}$$

da im angenommenen Beispiel $\mathring{w} = \pm 1$ ist. Eine Existenzmessung zur Zeit t (d. h. die Bestimmung von w) liefert hiernach die Übergangswahrscheinlichkeit u von t_0 nach t und nach den Gln. (30) und (15) außerdem die S-Matrix und die Wahrscheinlichkeiten v_i. *Die Wandlungswahrscheinlichkeiten ergeben sich also ebenfalls aus Existenzbeobachtungen.*

Machen wir ferner die in Ziff. 6 näher zu untersuchende Annahme, daß die Eigenvektoren $\mathring{\psi}^{(\varrho)}$ durch Gl. (33) gegeben sind, ohne daß ein reiner Fall vorzuliegen braucht, so gelten ebenfalls die Gln. (31) und (32), nach denen an die Stelle von Gl. (33)

$$w = (1 - 2u)\,\mathring{w} = v\,\mathring{w} \tag{34a}$$

tritt. Die statistischen Matrizen lauten:

$$\mathring{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathring{w}, & 0\\ 0\;, & 1-\mathring{w},\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+v\,\mathring{w}\,, & -\mathring{w}\sqrt{1-v^2}\\ -\mathring{w}\sqrt{1-v^2}, & 1-v\,\mathring{w}\end{pmatrix}. \tag{34b}$$

Ihre Diagonalelemente ergeben sich aus Gl. (12). $\mathring{P}_{12} = \mathring{P}_{21} = 0$ folgt aus unsrer Annahme und $P_{12} = P_{21} = \mathring{w}\sqrt{1-v^2}$ daraus, daß nicht nur die Spuren von $\mathring{P}$ und P, sondern auch die Determinanten übereinstimmen müssen. Die Transformationsmatrix ist nach Gl. (16) durch (15) gegeben. Hiernach ist es möglich, die Übergangswahrscheinlichkeiten auch dann zu bestimmen, wenn kein reiner Fall vorliegt, vorausgesetzt, daß Gl. (33) gilt.

6. Die Gleichung $w = v\,\mathring{w}$

Die hier wiederholte Gl. (34a) führt noch zu einer bemerkenswerten Einschränkung. Wenn $|w| > |\mathring{w}|$ ist, wird $|v| > 1$. Das widerspricht der Bedeutung von v. Wir können also auf Gleichungen stoßen, die zwar positive W_{ik} liefern, aber unsinnige v. Man kann dieser Schwierigkeit sofort entgehen, wenn man Anfangs- und Endpunkt vertauscht und die statistische Matrix im Zeitpunkt t auf Diagonalform bringt, so daß $p_i = w_i$ ist.

Offensichtlich spielt bei dieser Schwierigkeit die Nichtumkehrbarkeit gewöhnlicher statistischer Vorgänge herein. Denken wir uns eine Reihe aufeinanderfolgender Zeitintervalle (t_0, t_1), (t_1, t_2), (t_2, t_3) ... mit den Wandlungswahrscheinlichkeiten v_i', v_i'', v_i''' ..., so berechnet sich die Existenzwahrscheinlichkeit nach dem n-ten Intervall aus der Gleichung

$$w^{(n)} = v^{(n)} \cdot v^{(n-1)} \ldots v''\,v'\,\mathring{w}\,,$$

in der $\mathring{w}$ wie in (34a) auf die Anfangswahrscheinlichkeit bezogen ist. Wenn alle $|v^{(w)}| \leq 1$ sind, so bildet $w^{(n)}$ eine nicht aufsteigende Folge, die außer in speziellen Fällen monoton abfällt und gegen 0 konvergiert. Wir verlieren dabei immer mehr an Kenntnis. Ein derartiger einseitiger Ablauf statistischer Prozesse ist uns aus der Thermodynamik und aus der Fehlertheorie geläufig.

Quantenstatistische Prozesse sind demgegenüber umkehrbar. Wir dürfen daher bei ihrer Beschreibung

[4] Die Voraussetzung von Zuständen der Gewißheit ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, wenn wir fordern, daß $W_{ik} \geqq 0$ für beliebige S-Matrizen gelten soll. Setzen wir für P und S bzw.

$$P = \begin{pmatrix}A, B\\ B, C\end{pmatrix},\quad S = \begin{pmatrix}c, s\\ -s, c\end{pmatrix},$$

für die nach Ihrer Definition die Relationen gelten:

$$A \geq 0,\; C \geq 0,\; AC - B^2 \geq 0,\; c^2 + s^2 = 1,$$

so ist nach Gl. (16) $W_{ik} \geq 0$, wenn

$$\left|\frac{B}{C}\right| \leq |\operatorname{tg}\alpha|\,,\quad |\operatorname{ctg}\alpha| \leq \left|\frac{A}{B}\right|$$

ist. Das gilt für beliebige α nur dann, wenn $B = 0$ ist.

mit gewöhnlichen statistischen Methoden nur dann erwarten, daß nicht unsinnige Wahrscheinlichkeitswerte herauskommen, wenn wir den Ursprung so legen, daß alle Prozesse, die von ihm zu irgendeinem andern Punkt führen, immer in dieselbe Richtung, hier speziell in die Richtung abnehmender $|w|$ weisen. Wir müssen also stets

$$|w| \leq w_{\max} \leq |\mathring{w}|$$

annehmen. Darin ist $w_{\max}$ das Maximum der Werte von $|w|$, das in einer konkreten Gesamtheit wirklich erreicht wird.

Setzen wir $|\mathring{w}| = 1$, so ist der Ursprung ein Punkt der Gewißheit. Wir gelangen zu einer Darstellung, in der die Gesamtheit als reiner Fall erscheint. Setzen wir $|\mathring{w}| = w_{\max}$, so erhalten wir, wenn $w_{\max} < 1$ ist, ein Gemisch. Dasselbe gilt für irgendwelche Zwischenwerte:

$$w_{\max} \leq |\mathring{w}| < 1 .$$

Eine andere Wahl für positive W_{ik} und v_i gibt es nicht. Wenn $w_{\max} = 1$ ist, bleibt nur der reine Fall übrig.

Wir formulieren zum Schluß das Ergebnis: Der Grundprozeß der Quantentheorie enthält keine Elemente, die nicht der Anschauung zugänglich wären oder die sich der Objektivierbarkeit entzögen. Als Beweis dafür betrachten wir den Umstand, daß es stets möglich ist, eine statistische Gesamtheit von Grundprozessen mit den gewöhnlichen Methoden der Statistik zu behandeln, wenn man dabei nur berücksichtigt, daß diese für gerichtete Prozesse geschaffen sind, während die Quantenstatistik rückläufig sein kann. Hierin ist es begründet, daß wir den zeitlichen Verlauf von einem gemeinsamen Ursprung her betrachtet haben und nicht differentiell, wie es die Kausalanalyse erfordert. Die umkehrbaren statistischen Vorgängen angemessene Methode ist mindestens bei zweiwertigen Wahrscheinlichkeiten (Alternativen) die der Quantenstatistik.

Über die Objektivierbarkeit der Zustände in der nichtrelativistischen Quantenmechanik

Von RUDOLF HAAG

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. **8a**, 13—16 [1953]; eingegangen am 2. Oktober 1952)

Erwin Fues zum 60. Geburtstag gewidmet in dankbarer Erinnerung an viele Gespräche

Auf Grund zweier allgemeiner Forderungen an den Zustandsbegriff wird die Möglichkeit diskutiert, einem quantenmechanischen Einzelsystem objektive Zustandsgrößen zuzuordnen. Als kleinste hierdurch zugelassene Zustandsmannigfaltigkeit ergibt sich die Gesamtheit aller Wellenfunktionen. Da andererseits eine reale Auffassung der Wellenfunktionen zu den oft diskutierten Schwierigkeiten führt, erscheint die Anwendung des Zustandsbegriffs im hier definierten Sinn bei quantenmechanischen Systemen nicht zulässig.

Zwei Aspekte der Quantenmechanik sind verantwortlich für die Revision der erkenntnistheoretischen Grundlagen der Physik, die mit der Entwicklung der Quantenmechanik einsetzte und in der Formulierung der Axiome der Transformationstheorie einen gewissen Abschluß fand:

1. Die Indeterminiertheit des elementaren Geschehens. D. h.: Die bestmögliche Kenntnis der Situation der gegenwärtigen Welt genügt im allg. nicht, um den Ausgang eines Experiments vorherzusagen.
2. Die Schwierigkeiten der Objektivierbarkeit der Eigenschaften eines Systems. D. h.: Es ist im allg. nicht sinnvoll, einer Meßgröße in einem System einen bestimmten Wert zuzuschreiben, solange sie nicht beobachtet wird.

Hier soll lediglich die Schwierigkeit 2. betrachtet werden. Es besteht gedanklich kein zwingender Grund, den Begriff „Zustand eines Einzelsystems“ unmittelbar an die Meßgrößen anzuschließen. Man kann auch zunächst die Forderungen fixieren, die man an den Begriff stellt, und dann fragen, ob es irgendwelche Größen gibt, die diese Forderungen erfüllen und aus deren Gesetzmäßigkeiten sich die Erfahrungsgesetze — die auf Systemgesamtheiten bezogen sind — ableiten. In diesem weiteren Sinn möge das Wort „Objektivierbarkeit" hier verstanden werden. Es ist klar, daß die in 2. gegebene Fassung dieses Wortes sich unterordnet und daß außerdem ein System mit determinierten Gesetzen trivialerweise objektive Zustände besitzt. Umgekehrt folgt aus 1. und 2. noch nicht ohne weiteres die Nichtobjektivierbarkeit im weiteren Sinn. Da schon die Behauptung 2. und erst recht die allgemeinere Fragestellung keine direkte Aussage über den empirischen Tatbestand, sondern erst eine solche über die Möglichkeiten seiner Deutung betrifft, liegt zunächst der Verdacht nahe, die Diskussion sei inhaltsleer. Indessen ist eine direkte Prüfung der Frage, ob etwa eine Größe einen Wert hat, solange man ihn nicht mißt, natürlich nicht erst in der Quantenphysik unmöglich. Man kann daher die Frage nur so verstehen: führt ihre Bejahung zu Widersprüchen und Komplikationen oder zu einer Vereinfachung der Begriffsbildung? Wir fragen also: Welche Konsequenzen hätte die Annahme objektiver Größen in der Quantenphysik?

1. Objektivierbarkeit der Meßgrößen

Es möge zunächst nochmals die engere Aussage 2. betrachtet werden, da hier die Diskussion ohne formale Hilfsmittel zu führen ist. Heisenberg[1] diskutiert das folgende Beispiel: In einem stationären Zustand eines Elektrons im Atomverband der Energie E besteht eine beträchtliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß seine kinetische Energie negativ sein müßte, wenn die Beziehung

$$E = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}}(\mathfrak{r}) \tag{1}$$

gelten würde und der Ort einen objektiven Sinn hätte. Ein negatives E_{kin} wird aber ausgeschlossen, wenn es eine objektive Bedeutung (d. h. eine Bedeutung unabhängig vom Meßakt) haben soll, da niemals negative kinetische Energien gemessen wurden. Es gibt nur eine Alternative zur Nichtobjektivierbarkeit: Die Relation (1) gilt in der Quantenmechanik nicht. Da sie aber für die Mittelwerte innerhalb beliebiger Gesamtheiten richtig ist, würde folgen, daß an die Stelle der klassischen funktionalen Beziehung der Größen eine statistische Korrelation treten müßte. In ähnlicher Weise kann man bei anderen Meßgrößen schließen. Das Ergebnis wäre: die Zahl der Freiheitsgrade müßte ungeheuer groß sein und vermutlich alle Meßgrößen umfassen.

2. Objektivierbarkeit allgemeiner Zustandsgrößen

Wir stellen für das folgende zwei Forderungen an den Begriff Zustand:

a) Jedes System einer Gesamtheit befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem und nur einem Zustand, der durch die Werte irgendwelcher Variabler, die wir kollektiv mit ξ bezeichnen, charakterisiert wird.

b) Macht man an einem System im Zustand ξ irgendein Experiment, so soll der Ausgang (ob statistisch oder determiniert) durch ξ allein bestimmt sein (Vollständigkeitsforderung).

Mit diesen beiden Forderungen ist eine Fülle von Möglichkeiten umfaßt, über die wir hier keine näheren Voraussetzungen machen wollen. Ob etwa die ξ-Größen in irgendeiner Weise direkt den Meßgrößen Q des Systems zugeordnet werden können oder ob letztere erst bei dem hier nicht analysierten Wechselwirkungsakt mit dem Beobachtungsapparat „entstehen" und im unbeobachteten System keine Bedeutung haben, ob also der Übergang von einem Zustand ξ_α zu einem Meßergebnis $q_\varkappa$ determiniert ist oder nicht, soll nicht betrachtet werden[2]. Ebensowenig fragen wir, ob die zeitliche Veränderung der Zustände ξ selbst in determinierter Weise vor sich geht, ob die Herstellung einer Gesamtheit von Systemen in einem wohldefinierten Zustand experimentell möglich ist. Ja sogar die Frage, ob neben ξ noch irgendwelche verborgenen Variablen η existieren könnten, ist für das folgende belanglos, solange die Existenz von η nicht der Forderung b) widerspricht, d. h. sich in der Statistik der quantenmechanischen Versuche äußert. Wenn dies der Fall wäre, so wären die η eben keine verborgenen Parameter, sondern müßten per definitionem in die Bestimmungsstücke ξ aufgenommen werden. Dagegen wäre die Existenz von η mit b) verträglich, wenn etwa bei allen Gesamtheiten, die in der Quantenmechanik untersucht werden, jedem ξ automatisch eine bestimmte Häufigkeitsverteilung über η zukäme.

[1] W. Heisenberg, Die Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie. Leipzig 1944, S. 25.

[2] Die Indizes α bzw. k sollen einen speziellen Zustand bzw. Meßwert charakterisieren.

Man kann nun folgendermaßen schließen: Jede statistische Gesamtheit von Systemen muß nach a) dargestellt werden durch eine Verteilungsfunktion $W(\xi)$, jedes Experiment nach b) durch eine Matrix $S_{q_k \xi_\alpha}$, die die Wahrscheinlichkeit des Meßwerts q_k beim Vorliegen des Zustandes ξ_α darstellt. Dabei muß S nach b) unabhängig sein von $W(\xi)$ und — da der Versuch an jedem System der Gesamtheit unabhängig von den anderen durchgeführt wird — muß für die Wahrscheinlichkeit des Meßwerts q_k innerhalb der Gesamtheit gelten.

$$W(q_k) = \sum_\alpha S_{q_k \xi_\alpha} W(\xi_\alpha). \tag{2}$$

Also ein linearer Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeiten. Vergleichen wir damit die Aussagen der nichtrelativistischen Quantenmechanik! Eine beliebige Gesamtheit wird dargestellt durch die statistische Matrix U und die Wahrscheinlichkeit für q_k ist

$$W(q_k) = \mathrm{Spur}\,(P_{q_k} U), \tag{3}$$

wenn P_{q_k} der zum Meßwert q_k gehörende Projektionsoperator ist. Also ein linearer Zusammenhang zwischen $W(q_k)$ und U. Wenn die Aussagen (2) und (3) äquivalent sein sollen, so muß jedem $W(\xi_\alpha)$ ein U zugeordnet werden können und entsprechend jedem $S_{q_k \xi_\alpha}$ ein P_{q_k}. Der Vergleich von (2) und (3) zeigt weiter, daß der Zusammenhang zwischen $W(\xi)$ und U einerseits, P_{q_k} und S andererseits ein linearer sein muß. Also

$$W(\xi_\alpha) = \sum_{rs} T^\alpha_{sr}\, U_{rs} = \mathrm{Spur}\,(T^\alpha U). \tag{4}$$

Es folgt aus (2) und (3):

$$W(q_k) = \mathrm{Sp} \sum_\alpha S_{q_k \xi_\alpha} T^\alpha U = \mathrm{Sp}\, P_{q_k} U$$

für beliebige U, also

$$P_{q_k} = \sum_\alpha S_{q_k \xi_\alpha} T^\alpha, \tag{5}$$

d. h. es soll ein beliebiger Projektionsoperator zerlegt werden nach einem fest gegebenen System von Operatoren T^α, die hermitesch und positiv definit angenommen werden müssen, damit bei beliebigem U ein positives $W(\xi_\alpha)$ resultiert. Die Koeffizienten $S_{q_k \xi_\alpha}$ sollen dabei positive, reelle Größen sein, denn sie bedeuten Übergangswahrscheinlichkeiten.

Man kann die Frage auch so formulieren: Was ist das kleinste System positiv definiter Matrizen T^α, aus denen man durch Linearkombination mit positiven Koeffizienten jede beliebige positiv definite Matrix aufbauen kann? Die Antwort lautet: Die Gesamtheit aller Projektionsoperatoren. Denn ein Projektionsoperator ist nicht als Linearkombination zweier Matrizen im obigen Sinn darzustellen.

Beweis: Angenommen wir hätten eine solche Zerlegung:

$$P_\varphi = \alpha U_1 + (1-\alpha)\, U_2. \tag{6}$$

Ist $(\varphi \psi) = 0$, dann hat man für die Erwartungswerte hinsichtlich ψ:

$$0 = \alpha < | U_1 | > + (1-\alpha) < | U_2 | >.$$

Da α, $(1-\alpha)$, $< | U_1 | >$ und $< | U_2 | >$ nicht negativ sein dürfen, ist nur eine triviale Lösung möglich.

Damit ist gezeigt: Die kleinste Mannigfaltigkeit der objektiven Zustände eines Systems, die mit der Vollständigkeitsforderung im Einklang ist, ist die Gesamtheit aller Wellenfunktionen.

Es sei hier erwähnt, daß Gln. (2), (3), (4) mit einer sehr viel kleineren Zustandsmannigfaltigkeit zu erfüllen sind, wenn man erlaubt, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten S negative Werte annehmen können, was aber natürlich im Rahmen dieser Überlegung nicht in Betracht gezogen wird. Die kleinste Mannigfaltigkeit ist in diesem Fall gleich der der Matrixelemente von U und stimmt überein mit der korrespondierenden klassischen Zustandsmannigfaltigkeit[3]. Man kann daher etwa ξ mit den Wertepaaren zweier nicht gleichzeitig meßbarer Größen Q und P identifizieren und erhält dann

$$W(q_k, p_r) = \tfrac{1}{2}\,(T_{kr}\, U_{kr} + T^*_{kr}\, U^*_{kr}). \tag{4'}$$

(Keine Summation!)

Dabei ist U_{kr} das Matrixelement von U in der gemischten Darstellung, welche die Zeilen nach den Eigenwerten von Q, die Spalten nach denen von P ordnet, und T_{kr} das Element der unitären Transformationsmatrix, welche die Q-Darstellung in die P-Darstellung überführt.

Gl. (4′) wird u. a. in den Untersuchungen von Bopp über den Zusammenhang zwischen Korrelationsstatistik und Quantentheorie diskutiert[4].

[3] Für den Fall des n-Punkt-Raums hat die hermitesche Matrix U n^2 reelle Bestimmungsstücke, denen die n^2 Wertekombinationen der klassischen Zustandsgrößen q_i, p_K ($i, k = 1 \ldots n$) gegenüberstehen.

[4] F. Bopp, Z. Naturforschg. **7a**, 82 [1952]; **2a**, 202 [1947].

3. Konsequenzen

I. Es gibt (im wesentlichen) eine einzige Möglichkeit, die Vorstellung objektiver Zustände des Einzelsystems im Sinn der Forderungen a) und b) in der Quantenmechanik aufrechtzuerhalten[5]. Diese Möglichkeit: die Auffassung von ψ als objektivem Ausdruck für den Systemzustand, ist bereits häufig diskutiert worden. Sie führt zu Schwierigkeiten, wenn man die Wechselwirkung zweier Systeme in Betracht zieht[6] und hat außerdem die merkwürdige Konsequenz, daß jede Gesamtheit äquivalent ist einer speziellen Gesamtheit, in der nur ein Teil der Zustände (die Wellenfunktionen eines einzigen Orthogonalsystems) vorkommen.

II. Die Argumentation in 2. hat Berührungspunkte mit dem Beweis, den v. Neumann[7] für die Indeterminierbarkeit der Quantenmechanik gegeben hat. In der Tat ist die Aufgabe (5), auf die das Problem reduziert wurde, identisch mit der Frage, nach den „reinen" Gesamtheiten bei v. Neumann. Man kann also sagen: die Forderungen a) und b) an den Zustandsbegriff verlangen zumindest, daß eine Gesamtheit von Systemen im gleichen Zustand ξ eine „reine" Gesamtheit sei. Im Gegensatz zu dem erwähnten Indeterminierbarkeitsbeweis kommt es bei der Frage nach der kleinsten Zustandsmannigfaltigkeit jedoch nicht darauf an, daß keine Gesamtheiten existieren, die nicht durch eine statistische Matrix U beschrieben werden können, sondern nur darauf, daß jedes U durch eine Gesamtheit realisierbar ist.

[5] Man kann sich natürlich beliebig viele umfassendere Zustandsmannigfaltigkeiten ausdenken, doch besteht dazu im Rahmen unserer Forderungen kein Anlaß und es wird nichts dadurch gewonnen.

[6] W. Heisenberg, s. Zitat 1: Schnittbeweis; Einstein, Podolsky u. Rosen, Physic. Rev. **47**, 777 [1935].

[7] J. v. Neumann: Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag.

Zur Theorie der Streuung von Elektronen an Elektronen

Von H. Salecker

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. **8a**, 16–19 [1953]; eingegangen am 18. November 1952)

Herrn Professor Dr. Erwin Fues zum 60. Geburtstag

Im Hinblick auf eine experimentelle Prüfung der höheren Näherungen der Quantenelektrodynamik mit Hilfe der Streuung von Elektronen an Elektronen werden die Abänderungen der Elektron-Elektron-Streuung untersucht, die sich aus der verallgemeinerten Feldtheorie ergeben. Im ersten Abschnitt wird das allgemeine Matrixelement für eine beliebige Strukturfunktion angegeben. Im zweiten Abschnitt wird der differentielle Wirkungsquerschnitt für eine Spezialisierung berechnet und der allgemeine Wirkungsquerschnitt mit Hilfe des berechneten dargestellt. Zum Schluß werden die Abweichungen von der Møllerschen Formel diskutiert, die sich bei zwei verschieden gewählten Größen der Abänderung (des „Elektronenradius") ergeben. Dabei zeigt es sich, daß die betrachteten Abweichungen bei einer plausiblen Größe der Abänderung erst dann deutlich bemerkt werden können, wenn die Energie des einfallenden Teilchens im Laboratoriumssystem 10^9 eV überschreitet.

Die höheren Näherungen der Quantenelektrodynamik sind mit großer Genauigkeit durch zwei Experimente bestätigt. Das sind bekanntlich die Messungen des zusätzlichen magnetischen Moments des Elektrons und der Lambschen Verschiebung bei der Feinstruktur des Wasserstoffs. Diese beiden Effekte hängen jedoch von den Einzelheiten der Theorie wesentlich nur im nichtrelativistischen Gebiet, d. h. vom Bereich kleiner Energie-Impuls-Übertragung ab. Es sind deshalb quantitative Prüfungen der höheren Näherungen der Quantenelektrodynamik im Bereich großer Energie-Impuls-Übertragungen nötig. Dazu kommen besonders Streuexperimente in Frage. Die Streuung von Elektronen an Kernen, an die man dabei zunächst denkt, ist jedoch hierzu nicht sehr geeignet, da die Ladungsverteilung der Kerne nicht genau bekannt ist. Man benutzt vielmehr umgekehrt Abweichungen von der normalen Streuung zur Bestimmung der Ladungsverteilung. Im Rahmen der Quantenelektrodynamik bietet sich